MA 2223 ALG 3. ABRIL-JULIO 2006.
PROBLEMARIO 1

1. ¿ Para cúales $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ es $||(x, y)|| = (ax^2 + bxy + cy^2)^{1/2}$ una norma sobre $\mathbf{R}^2$?

2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Probar que $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sum_{i=1}^{n} a_i|x_i|$ y $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \max\{a_1|x_1|, \ldots, a_n|x_n|\}$ son ambas normas sobre $\mathbf{R}^n$. ¿Estas definiciones dan normas sobre $\mathbf{C}^n$?

3. Probar que $||(x_1, \ldots, x_n)||$ = el número de i tal que $x_i \neq 0$ define una norma sobre F^n, F cuerpo, si se define $|\lambda|$, $\lambda \in F$ como 0 si $\lambda = 0$, 1 en todo otro caso. Esta norma se llama "norma de Hamming".

4. Sea X un conjunto. Una *métrica* sobre X es una función $X \times X \to \mathbf{R}$ tal que: (i)$d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ sii $x = y$.(ii) $\forall x, y \in X, \ d(x, y) = d(y, x)$; (iii) (Desigualdad del triángulo). $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Asi d comparte las propriedades de la distancia Euclidea en $\mathbf{R}^n$. Si $||$ es una norma sobre un espacio vectorial real o complejo V, probar que $d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$ es una métrica sobre V. ¿Es que cada métrica sobre V viene de una norma?

5. Describir la métrica asociada con la norma de Hamming de la pregunta 3, es decir, definir $d(\vec{x}, \vec{y})$ directamente, sin referencia a la norma.

6. Sea $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ un intervalo y sea $K : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funcción contínua tal que $K(t) > 0 \ \forall t \in (a, b)$. Probar que $< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)K(t)dt$ es un producto interior sobre $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$, el espacio de funciones contínuas $[a, b] \to \mathbf{R}$.

7. Sea $< , >$ un producto interior sobre un espacio V. Sea S un *subconjunto* de V. Sea $S^\perp = \{\vec{v} \in V | < \vec{s}, \vec{v} >= 0 \ \forall \vec{s} \in S\}$ Probar

   (a) $S^\perp$ es un subespacio de V (aunque S no lo sea).

   (b) Sea $W = span\{S\}$. Entonces $W^\perp = S^\perp$.

   Calcular $S^\perp$ para (i) $S = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0)\}$, (ii) $S = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (1, 0, -1)\}$, (iii)$S = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 4, 5)\}$, el producto en todos los casos siendo el . usual de $\mathbf{R}^3$. Calcular también $S^\perp$ si $S = \{1, x^2\} \subset P^2_{\mathbf{R}}$, con $< f, g >= \int_0^1 fg dx$.

8. Probar que $< A, B >= Tr(AB^t)$ define un producto interior sobre $M_{n\times n}(\mathbf{R})$. (Tr denota la *traza*, la suma de los elementos diagonales de una matriz cuadrada).

9. Si $\vec{v}, \vec{w}$ son vectores de un espacio con producto interior real probar que $||\vec{v} + \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$ si y solo si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.